Exercice 1

① $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$.

ici $a_n = \frac{n}{4^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. On a $a_n \geq 0$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{4^{n+1}} \cdot \frac{4^n}{n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n+1}{n}$$

D'où $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{4}$

Le rayon de convergence est $R = 4$.

Pour $x = \pm 4$, on a $|a_n x^n| = n$

donc $\lim_{n \to +\infty} a_n x^n \neq 0$. D'où pour $x = -4$ ou $x = 4$ la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ diverge.

② $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-3n} x^n$.

ici $a_n = e^{-3n} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^{-3n-3}}{e^{-3n}} = \frac{1}{e^3}.$$

D'où le rayon de convergence est $R = e^3$.

Pour $x = \pm e^3$, on a $|a_n x^n| = 1$

Donc $\lim_{n \to +\infty} a_n x^n \neq 0$. Par suite $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-3n} x^n$ diverge pour $x = -e^3$ ou $x = e^3$.

③ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\right) x^n$.

ici $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n} > 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

Donc le rayon de convergence est $R = 2$.

Pour $x = \pm 2$, on a $\left|\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)x^n\right| \sim 1$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \left|\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)x^n\right| \neq 0$ pour $x = \pm 2$

ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)x^n$ diverge pour $x = \pm 2$.

④ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(2n+1)}$.

ici $a_n = \frac{1}{4^n(2n+1)} \sim \frac{1}{2n4^n} > 0$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2(n+1)4^{n+1}}}{\frac{1}{2n4^n}}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{4(n+1)} = \frac{1}{4}$$

Donc le rayon de convergence est $R = 4$.

. Pour $x = 4$, $a_n x^n = \frac{1}{2n+1}$ or $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

diverge, donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(2n+1)}$ diverge pour $x = 4$

Scanné avec CamScanner

• Pour $x=-4$, $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Or $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial des séries alternées

donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge,

Par conséquent, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n(2n+1)}$ converge pour $x=-4$.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\, n^n} x^n$

ici $a_n = \frac{(2n)!}{n!\, n^n} > 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n!\, n^n}{(2n)!}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\sim 4\, e^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{e}$

Le rayon de convergence est $R = \frac{e}{4}$

Pour $x = \pm \frac{e}{4}$

on a $|a_n x^n| = \frac{(2n)!}{n!\, n^n} \frac{e^n}{4^n}$.

En utilisant la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

D'où $(2n)! \sim \sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$

$$\frac{(2n)!}{n!} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^{n} = \sqrt{2}\, 4^{n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}.$$

$$\frac{(2n)!}{n!\, n^{n}}\cdot\frac{e^{n}}{4^{n}} \sim \sqrt{2}\cdot 4^{n}\,\frac{n^{n}}{e^{n}}\cdot\frac{e^{n}}{4^{n}}\cdot\frac{1}{n^{n}} = \sqrt{2}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n x^n| = \sqrt{2} \neq 0$

Par conséquent la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\, n^{n}} x^{n}$

diverge pour $x = \pm \frac{e}{4}$.

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} x^{n}$

ici $a_n = n^{\sqrt{n}} > 0$. On a $\sqrt[n]{a_n} = e^{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln n}$

et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{1/\sqrt{n}\ln n} = 1$.

D'où le rayon de convergence est $R = 1$.

Pour $x = \pm 1$, $|a_n x^n| = n^{\sqrt{n}}$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n x^n| = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\sqrt{n}\ln n} = +\infty$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n x^n| \neq 0$ et par conséquent

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}} x^{n}$ diverge pour $x = \pm 1$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 :

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

ici $a_n = (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1) x^{2n+3}}{n x^{2n+1}}\right| = \frac{n+1}{n} \cdot x^2$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = x^2$$

D'après le critère de D'Alembert :

- si $|x^2| < 1$ c'est à dire $|x| < 1$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$ converge.
- si $|x| > 1$ alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$ diverge.

Par conséquent le rayon de convergence est $R = 1$.

. Calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$ pour $x \in]-1,1[$.

Pour tout $t \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}$$

en dérivant, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (-1)^n t^{n-1} = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

Scanné avec CamScanner

D'où $$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^{n+1}\, t^{n-1} = \frac{1}{(1+t)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^{n+1}\, t^{n} = \frac{t}{(1+t)^2}$$

En posant $t = x^2$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^{n+1}\, x^{2n} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(-1)^{n+1}\, x^{2n} = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

Par suite, $\forall x \in]-1, 1[$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,(-1)^{n+1}\, x^{2n+1} = \frac{x^3}{(1+x^2)^2}.$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n$

ici $a_n = \frac{2n+3}{2n+1} \sim 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ et le rayon de convergence est $R = 1$.

- Calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n \quad \forall x \in]-1,1[$.

On a : $\frac{2n+3}{2n+1} = 1 + \frac{2}{2n+1}$ donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

Pour $x \in]0,1[$.

$\forall t \in]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \frac{1}{1-t^2}$

En intégrant, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$$

en posant $t = \sqrt{x}$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n\sqrt{x}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

D'où $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right).$$

D'autre part $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{2n+1} x^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) & \text{si } x \in]0,1[\\ 3 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{1-x} + 2\,\dfrac{\arctan\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x \in]-1,0[\end{cases}$$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n!} x^n$

ici $a_n = \dfrac{3n^2+1}{n!} \sim \dfrac{3n^2}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= 0$$

Donc le rayon de convergence est $R = +\infty$.

- Calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n!} x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$

On a : $\dfrac{3n^2+1}{n!} = \dfrac{3n(n-1)+3n+1}{n!}$

Scanné avec CamScanner

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n!} x^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 3x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= (3x^2+3x+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+1}{n!} x^n = (3x^2+3x+1)\, e^x .$$

Scanné avec CamScanner

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$.

ici $a_n = \frac{1}{n2^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

D'où le rayon de convergence est $R = 2$.

- Calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$ pour tout $x \in]-2,2[$

Soit $x \in]-2,2[$,

Pour $t \in]-1,1[$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$$

en intégrant, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-t)$$

D'où $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$

En prenant $t = \frac{x}{2}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right).$$